



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2008

Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория многомерных дифференциальных уравнений

АВТОНОМНОСТЬ И ЦИЛИНДРИЧНОСТЬ \mathbb{R} -ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

В.Н. Горбузов*, А.Ф. Проневич**

Беларусь, 230023, Гродно, ул. Ожешко, 22,
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы,
e-mail: gorbuzov@grsu.by*
e-mail: pronevich@tut.by**

Аннотация.

Для системы уравнений в полных дифференциалах получены необходимые условия и критерии существования автономных и цилиндричных по части переменных \mathbb{R} -дифференцируемых первых интегралов, частных интегралов и последних множителей.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = X_1(z, w)dz + X_2(z, w)d\bar{z}, \quad (1)$$

где w и z — точки пространств \mathbb{C}^n и \mathbb{C}^m соответственно, векторы-столбцы $dw = \text{colon}(dw_1, \dots, dw_n)$, $dz = \text{colon}(dz_1, \dots, dz_m)$, $d\bar{z} = \text{colon}(d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m)$,

\bar{z}_j комплексно сопряжено к z_j , а элементами матриц $X_1(z, w) = \|X_{\xi j}(z, w)\|$ и $X_2(z, w) = \|X_{\xi, m+j}(z, w)\|$ являются \mathbb{R} -дифференцируемые [1, с. 33; 2, с. 22] на области $G \subset \mathbb{C}^{m+n}$ функции $X_{\xi l}: G \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, 2m}$.

В случае одного комплексного переменного \mathbb{R} -дифференцируемая функция $w: V \rightarrow \mathbb{C}$ при условии $\partial_{\bar{z}} w(z) = 0 \forall z \in V$ является голоморфной на области $V \subset \mathbb{C}$, а при $\partial_z w(z) = 0 \forall z \in V$ — антиголоморфной [1, с. 42]. Если $(p(x, y) - iq(x, y))\partial_{\bar{z}} \operatorname{Re} w(z) + i\partial_{\bar{z}} \operatorname{Im} w(z) = 0 \forall (x, y) \in V$, а функция p — определённоположительна, то w является (p, q) -аналитической [3] на области V . Если $\partial_{\bar{z}} w(z) + A(z)w(z) + B(z)\bar{w}(z) = C(z) \forall z \in V$, то w — обобщённая аналитическая функция [4] на области V .

В многомерном случае для вполне разрешимой [5] дифференциальной системы (1) с \mathbb{R} -голоморфной правой частью доказано [6] существование и единственность \mathbb{R} -голоморфного решения (аналог теоремы Коши), а для вполне разрешимого уравнения в полных дифференциалах проведена классификация \mathbb{R} -особых точек решений и получены достаточные условия отсутствия подвижных неалгебраических \mathbb{R} -особых точек (аналог теорем Фукса и Пенлеве) [7]. Разработан спектральный метод построения интегрального базиса \mathbb{R} -линейных многомерных дифференциальных систем [8; 9].

Ставится задача существования \mathbb{R} -дифференцируемых интегралов и последних множителей у дифференциальной системы (1).

Основываясь на подходах [10, с. 29; 11, с. 341; 12; 13, с. 161], будем использовать следующие понятия. \mathbb{R} -дифференцируемая на области $G' \subset G$ функция: а) $F: G' \rightarrow \mathbb{C}$; б) $f: G' \rightarrow \mathbb{C}$; в) $\mu: G' \rightarrow \mathbb{C}$ является: а) первым интегралом; б) частным интегралом; в) последним множителем системы в полных дифференциалах (1), если и только если производные Ли:

$$\text{а) } \mathfrak{X}_l F(z, w) = 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m};$$

$$\text{б) } \mathfrak{X}_l f(z, w) = \Phi_l(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad \text{где } \Phi_l(0; z, w) \equiv 0, \quad l = \overline{1, 2m};$$

$$\text{в) } \mathfrak{X}_l \mu(z, w) = -\mu(z, w) \operatorname{div} \mathfrak{X}_l(z, w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m},$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(z, w) = \partial_{z_j} + \sum_{\xi=1}^n (X_{\xi j}(z, w) \partial_{w_\xi} + \bar{X}_{\xi, m+j}(z, w) \partial_{\bar{w}_\xi}) \quad \forall (z, w) \in G, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j}(z, w) = \partial_{\bar{z}_j} + \sum_{\xi=1}^n (X_{\xi, m+j}(z, w) \partial_{w_\xi} + \bar{X}_{\xi j}(z, w) \partial_{\bar{w}_\xi}) \quad \forall (z, w) \in G, \quad j = \overline{1, m}.$$

\mathbb{R} -дифференцируемый первый интеграл F (частный интеграл f и последний множитель μ) системы (1) назовём [14 – 16] (s_1, s_2) -неавтономным, если функция \tilde{F} (\tilde{f} и $\tilde{\mu}$), полученная из F (f и μ) посредством соответствия $z_j \mapsto x_j, \bar{z}_j \mapsto y_j$ ($j = \overline{1, m}$), $w_\xi \mapsto u_\xi, \bar{w}_\xi \mapsto v_\xi$ ($\xi = \overline{1, n}$), зависит от $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$ и только от s_1 ($0 \leq s_1 \leq m$) переменных x_1, \dots, x_m и s_2 ($0 \leq s_2 \leq m$) переменных y_1, \dots, y_m . Если функция \tilde{F} (\tilde{f} и $\tilde{\mu}$) зависит от $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m)$ и только от k_1 ($0 \leq k_1 \leq n$) переменных u_1, \dots, u_n и k_2 ($0 \leq k_2 \leq n$) переменных v_1, \dots, v_n , то F (f и μ) назовём $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричным. Иначе говоря, первый интеграл F (частный интеграл f и последний множитель μ), антиголоморфный по $m - s_1$ и голоморфный по $m - s_2$ независимым переменным является (s_1, s_2) -неавтономным; а антиголоморфный по $n - k_1$ и голоморфный по $n - k_2$ зависимым переменным является $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричным.

\mathbb{R} -дифференцируемые частные интегралы

Предположим, что система (1) имеет (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый на области G' частный интеграл

$$f: (z, w) \rightarrow f(sz, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad (2)$$

где для удобства записи принято сокращение $s = (s_1, s_2), k = (n - k_1, n - k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция f является антиголоморфной по независимым z_{s_1+1}, \dots, z_m и зависимым w_{k_1+1}, \dots, w_n переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}}, \dots, z_{j_m}, j_\beta \in \{1, \dots, m\}, \beta = \overline{s_2 + 1, m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}}, \dots, w_{\zeta_n}, \zeta_\delta \in \{1, \dots, n\}, \delta = \overline{k_2 + 1, n}$, переменным. Тогда, по критерию существования частного интеграла, справедливы тождества

$$\mathfrak{X}_{lsk} f(sz, {}^k w) = \Phi_l(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m}, \quad (3)$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(z, w) = \partial_{z_\theta} + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\theta}(z, w) \partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \bar{X}_{\zeta_\tau, m+\theta}(z, w) \partial_{\bar{w}_{\zeta_\tau}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\mathfrak{X}_{\eta sk}(z, w) = \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\eta}(z, w) \partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \bar{X}_{\zeta_\tau, m+\eta}(z, w) \partial_{\bar{w}_{\zeta_\tau}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_g,sk}(z, w) = \partial_{\overline{z_{j_g}}} + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi, m+j_g}(z, w) \partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z, w) \partial_{\overline{w_{\zeta_\tau}}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_\nu,sk}(z, w) = \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi, m+j_\nu}(z, w) \partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z, w) \partial_{\overline{w_{\zeta_\tau}}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\theta = \overline{1, s_1}, \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \quad g = \overline{1, s_2}, \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m},$$

индексы $\zeta_\tau \in \{1, \dots, n\}$, $\tau = \overline{1, k_2}$, $j_g \in \{1, \dots, m\}$, $g = \overline{1, s_2}$, $j_\nu \in \{1, \dots, m\}$, $\nu = \overline{s_2 + 1, m}$ (при этом, если множество $J_g = \{j_g : g = \overline{1, s_2}\}$, а множество $J_\nu = \{j_\nu : \nu = \overline{s_2 + 1, m}\}$, то $J_g \cap J_\nu = \emptyset$, а $\text{Card } J_g \cup J_\nu = m$).

Пусть выполняются тождества (3). Тогда в каждой из совокупностей

$$\begin{aligned} & \{1, X_{1\theta}(z, w), \dots, X_{k_1\theta}(z, w), \overline{X}_{\zeta_1, m+\theta}(z, w), \dots, \overline{X}_{\zeta_{k_2}, m+\theta}(z, w)\}, \\ & \{X_{1\eta}(z, w), \dots, X_{k_1\eta}(z, w), \overline{X}_{\zeta_1, m+\eta}(z, w), \dots, \overline{X}_{\zeta_{k_2}, m+\eta}(z, w)\}, \\ & \{1, X_{1, m+j_g}(z, w), \dots, X_{k_1, m+j_g}(z, w), \overline{X}_{\zeta_1 j_g}(z, w), \dots, \overline{X}_{\zeta_{k_2}, j_g}(z, w)\}, \\ & \{X_{1, m+j_\nu}(z, w), \dots, X_{k_1, m+j_\nu}(z, w), \overline{X}_{\zeta_1 j_\nu}(z, w), \dots, \overline{X}_{\zeta_{k_2}, j_\nu}(z, w)\}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\theta = \overline{1, s_1}, \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \quad g = \overline{1, s_2}, \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m},$$

функции на интегральном многообразии

$$f(sz, {}^k w) = 0 \tag{5}$$

при всяких фиксированных значениях переменных z_j , $j = \overline{1, m}$, $j \neq \alpha$, и w являются линейно связанными [17, с. 105] с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G ; при фиксированных значениях переменных z_j , $j = \overline{1, m}$, $j \neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G ; при фиксированных значениях переменных z и w_p , $p = \overline{1, n}$, $p \neq \gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G ; при фиксированных значениях переменных z и w_p , $p = \overline{1, n}$, $p \neq \zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G . Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha = \overline{s_1 + 1, m}$, j_β , $\beta = \overline{s_2 + 1, m}$,

$\gamma = \overline{k_1 + 1, n}$, ζ_δ , $\delta = \overline{k_2 + 1, n}$. Поэтому вронскианы по z_α , $\bar{z}_{j\beta}$, w_γ и \bar{w}_{ζ_δ} каждой из совокупностей (4) тождественно равны нулю на интегральном многообразии (5), т.е. верна система тождеств

$$\begin{aligned} W_\chi(1, {}^\lambda X^\theta(z, w)) &= \Psi_{\theta\chi}(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G, \quad \theta = \overline{1, s_1}, \\ W_\chi({}^\lambda X^\eta(z, w)) &= \Psi_{\eta\chi}(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G, \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \\ W_\chi(1, {}^\lambda X^{m+j_g}(z, w)) &= \Psi_{m+j_g, \chi}(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G, \quad g = \overline{1, s_2}, \\ W_\chi({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z, w)) &= \Psi_{m+j_\nu, \chi}(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G, \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m}, \end{aligned} \tag{6}$$

где число $\lambda = k_1 + k_2$, вектор-функции на области G

$$\begin{aligned} {}^\lambda X^j: (z, w) &\rightarrow (X_{1j}, \dots, X_{k_1 j}, \bar{X}_{\zeta_{1, m+j}}, \dots, \bar{X}_{\zeta_{k_2, m+j}})(z, w) \quad (j = \overline{1, m}), \\ {}^\lambda X^{m+j}: (z, w) &\rightarrow (X_{1, m+j}, \dots, X_{k_1, m+j}, \bar{X}_{\zeta_{1j}}, \dots, \bar{X}_{\zeta_{k_2 j}})(z, w) \quad (j = \overline{1, m}), \end{aligned}$$

скалярные функции $\Psi_{l\chi}: G \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $\Psi_{l\chi}(0; z, w) \equiv 0$, $l = \overline{1, 2m}$, а W_χ — вронскиан по переменной χ , которая принимает значения z_α , $\bar{z}_{j\beta}$, w_γ и \bar{w}_{ζ_δ} ($\alpha = \overline{s_1 + 1, m}$, $\beta = \overline{s_2 + 1, m}$, $\gamma = \overline{k_1 + 1, n}$, $\delta = \overline{k_2 + 1, n}$).

Таким образом, имеют место

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) имела (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый частный интеграл (2), необходимо выполнение системы тождеств (6).*

Следствие 1. *Система тождеств (6) при $s_2 = 0$, $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия $(s_1, 0)$ -неавтономного $(n - k_1, n)$ -цилиндричного голоморфного частного интеграла (2) у дифференциальной системы (1).*

Следствие 2. *Система тождеств (6) при $s_1 = 0$, $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$ -неавтономного $(n, n - k_2)$ -цилиндричного антиголоморфного частного интеграла (2) у системы (1).*

Следствие 3. *Для того, чтобы у системы (1) существовал автономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый на области Ω' пространства \mathbb{C}^n частный интеграл $f: w \rightarrow f({}^k w) \quad \forall w \in \Omega'$ необходимо выполнение системы тождеств (6) при $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.*

Пусть \mathbb{R} -дифференцируемые на области G , достаточное число раз, функции $X_{\xi l}: G \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, 2m}$, удовлетворяют условиям (6). Составим функциональную систему

$$\begin{aligned} \psi_{\theta s_1} + \lambda_{\varphi} [\lambda X^{\theta}(z, w)]^T &= H_{\theta}(f; z, w), \\ \lambda_{\varphi} [\partial_{\chi}^p \lambda X^{\theta}(z, w)]^T &= \partial_{\chi}^p H_{\theta}(f; z, w), \quad p = \overline{1, \lambda}, \quad \theta = \overline{1, s_1}, \\ \lambda_{\varphi} [\lambda X^{\eta}(z, w)]^T &= H_{\eta}(f; z, w), \\ \lambda_{\varphi} [\partial_{\chi}^p \lambda X^{\eta}(z, w)]^T &= \partial_{\chi}^p H_{\eta}(f; z, w), \quad p = \overline{1, \lambda - 1}, \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \\ \psi_{g s_2} + \lambda_{\varphi} [\lambda X^{m+j_g}(z, w)]^T &= H_{m+j_g}(f; z, w), \\ \lambda_{\varphi} [\partial_{\chi}^p \lambda X^{m+j_g}(z, w)]^T &= \partial_{\chi}^p H_{m+j_g}(f; z, w), \quad p = \overline{1, \lambda}, \quad g = \overline{1, s_2}, \\ \lambda_{\varphi} [\lambda X^{m+j_{\nu}}(z, w)]^T &= H_{m+j_{\nu}}(f; z, w), \\ \lambda_{\varphi} [\partial_{\chi}^p \lambda X^{m+j_{\nu}}(z, w)]^T &= \partial_{\chi}^p H_{m+j_{\nu}}(f; z, w), \quad p = \overline{1, \lambda - 1}, \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m}, \end{aligned} \tag{7}$$

где функции $H_l: G \rightarrow \mathbb{C}$ таковы, что $H_l(0; z, w) \equiv 0$, $l = \overline{1, 2m}$, T — знак транспонирования, функции $\psi_{\theta s_1}$, $\theta = \overline{1, s_1}$, и $\psi_{g s_2}$, $g = \overline{1, s_2}$, являются координатами векторных функций ${}^{s_1}\psi$ и ${}^{s_2}\psi$ соответственно, а векторная функция $\lambda_{\varphi} = ({}^{k_1}\varphi, {}^{k_2}\varphi)$ на области G имеет координатные функции

$${}^{k_1}\varphi: (z, w) \rightarrow (\varphi_{1k_1}, \dots, \varphi_{k_1 k_1})({}^{s_1}z, {}^{k_1}w), \quad {}^{k_2}\varphi: (z, w) \rightarrow (\varphi_{1k_2}, \dots, \varphi_{k_2 k_2})({}^{s_2}z, {}^{k_2}w).$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^{s_1}\psi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d{}^{s_1}z + {}^{s_2}\psi({}^{s_2}z, {}^{k_2}w) d{}^{s_2}\bar{z} + {}^{k_1}\varphi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d{}^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi({}^{s_2}z, {}^{k_2}w) d{}^{k_2}\bar{w} = 0, \tag{8}$$

где векторы-столбцы $d{}^{s_1}z = \text{colon}(dz_1, \dots, dz_{s_1})$, $d{}^{s_2}\bar{z} = \text{colon}(d\bar{z}_{j_1}, \dots, d\bar{z}_{j_{s_2}})$, $d{}^{k_1}w = \text{colon}(dw_1, \dots, dw_{k_1})$, $d{}^{k_2}\bar{w} = \text{colon}(d\bar{w}_{\zeta_1}, \dots, d\bar{w}_{\zeta_{k_2}})$ и докажем критерий существования частного интеграла вида (2) у системы (1).

Теорема 2. *Для того, чтобы система (1) имела \mathbb{R} -дифференцируемый на области G' частный интеграл (2), необходимо и достаточно существования функций ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$, λ_{φ} и H_l , $l = \overline{1, 2m}$, удовлетворяющих системе (7), таких, что уравнение Пфаффа (8) имеет интегрирующий множитель, после умножения на который получаем точное уравнение Пфаффа с общим интегралом (2) на области G^r , $r = \tilde{s} + \tilde{k}$, являющейся естественной проекцией G' на подпространство $O^{\tilde{s}}z^{\tilde{k}}w$, где \tilde{s} и \tilde{k} — число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция (2).*

Доказательство. Необходимость. Пусть у системы (1) существует частный интеграл (2). Тогда выполняются тождества (3). Дифференцируя их λ раз по χ при $\theta = \overline{1, s_1}$, $g = \overline{1, s_2}$, и $\lambda - 1$ раз по χ при $\eta = \overline{s_1 + 1, m}$, $\nu = \overline{s_2 + 1, m}$, убеждаемся, что векторные функции

$${}^{s_1}\psi: (z, w) \rightarrow \partial_{s_1 z} f(s z, {}^k w), \quad {}^{s_2}\psi: (z, w) \rightarrow \partial_{\overline{s_2 z}} f(s z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G',$$

$${}^{k_1}\varphi: (z, w) \rightarrow \partial_{k_1 w} f(s z, {}^k w), \quad {}^{k_2}\varphi: (z, w) \rightarrow \partial_{\overline{k_2 w}} f(s z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G',$$

являются решением функциональной системы (7) при

$$H_l(f; z, w) = \Phi_l(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m},$$

где операторы $\partial_{s_1 z} = (\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_{s_1}})$, $\partial_{\overline{s_2 z}} = (\partial_{z_{j_1}}, \dots, \partial_{z_{j_{s_2}}})$, $\partial_{k_1 w} = (\partial_{w_1}, \dots, \partial_{w_{k_1}})$, $\partial_{\overline{k_2 w}} = (\partial_{\overline{w_{\zeta_1}}}, \dots, \partial_{\overline{w_{\zeta_{k_2}}}})$. Отсюда следует, что функция (2) есть общий интеграл на области G^r уравнения Пфаффа (8).

Достаточность. Пусть ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и ${}^\lambda\varphi$ — решение системы (7), а уравнение Пфаффа (8), составленное на его основании, имеет при условии (5) интегрирующий множитель $\mu: (s z, {}^k w) \rightarrow \mu(s z, {}^k w)$ и соответствующий этому множителю общий интеграл (2). Тогда на G^r выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} \partial_{s_1 z} f(s z, {}^k w) &= \mu(s z, {}^k w) {}^{s_1}\psi(s z, {}^k w), & \partial_{\overline{s_2 z}} f(s z, {}^k w) &= \mu(s z, {}^k w) {}^{s_2}\psi(s z, {}^k w), \\ \partial_{k_1 w} f(s z, {}^k w) &= \mu(s z, {}^k w) {}^{k_1}\varphi(s z, {}^k w), & \partial_{\overline{k_2 w}} f(s z, {}^k w) &= \mu(s z, {}^k w) {}^{k_2}\varphi(s z, {}^k w). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда в силу (7) получаем, что справедлива система тождеств (3), для которой $\Phi_l(f; z, w) = \mu(s z, {}^k w) H_l(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G'$, $l = \overline{1, 2m}$, а значит, (2) есть частный интеграл дифференциальной системы (1). ■

Теорема 3. Пусть h систем (7) имеет q не являющихся линейно связанными на области G' решений

$$\begin{aligned} {}^{s_1}\psi^\varepsilon: (z, w) &\rightarrow {}^{s_1}\psi^\varepsilon(s z, {}^k w), & {}^{s_2}\psi^\varepsilon: (z, w) &\rightarrow {}^{s_2}\psi^\varepsilon(s z, {}^k w), \\ {}^\lambda\varphi^\varepsilon: (z, w) &\rightarrow {}^\lambda\varphi^\varepsilon(s z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G', & \varepsilon &= \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (10)$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$${}^{s_1}\psi^\varepsilon(s z, {}^k w) d^{s_1 z} + {}^{s_2}\psi^\varepsilon(s z, {}^k w) d^{\overline{s_2 z}} + {}^{k_1}\varphi^\varepsilon(s z, {}^k w) d^{k_1 w} + {}^{k_2}\varphi^\varepsilon(s z, {}^k w) d^{\overline{k_2 w}} = 0 \quad (11)$$

имеют соответственно \mathbb{R} -дифференцируемые общие интегралы

$$f_\varepsilon: ({}^s z, {}^k w) \rightarrow f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) \quad \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r, \quad \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области G^r .

Доказательство. В силу тождеств (9) при $f = f_\varepsilon$, $\varepsilon = \overline{1, q}$, получаем, что

$$\partial_{s_1 z} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) {}^{s_1} \psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{s_2 z} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) {}^{s_2} \psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\partial_{k_1 w} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) {}^{k_1} \varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{k_2 w} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) {}^{k_2} \varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)$$

$$\forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r, \quad \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \left\| {}^{s_1} \Psi({}^s z, {}^k w) {}^{s_2} \Psi({}^s z, {}^k w) {}^{k_1} \Phi({}^s z, {}^k w) {}^{k_2} \Phi({}^s z, {}^k w) \right\| \quad \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r,$$

где матрица $\left\| {}^{s_1} \Psi {}^{s_2} \Psi {}^{k_1} \Phi {}^{k_2} \Phi \right\|$ составлена из $(q \times s_1)$ -матрицы ${}^{s_1} \Psi = \left\| \mu_\varepsilon \psi_{\varepsilon \theta s_1} \right\|$, $(q \times s_2)$ -матрицы ${}^{s_2} \Psi = \left\| \mu_\varepsilon \psi_{\varepsilon g s_2} \right\|$, $(q \times k_1)$ -матрицы ${}^{k_1} \Phi = \left\| \mu_\varepsilon \varphi_{\varepsilon \xi k_1} \right\|$ и $(q \times k_2)$ -матрицы ${}^{k_2} \Phi = \left\| \mu_\varepsilon \varphi_{\varepsilon \tau k_2} \right\|$. Так как решения (10) не являются линейно связанными, то $\text{rank } J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = q$ почти везде на области G^r , за исключением, быть может, множества r -мерной меры нуль.

Таким образом, общие интегралы уравнений Пфаффа (11) являются функционально независимыми на области G^r . ■

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= (w_1^2 + w_2 \bar{w}_2) dz + (w_1 w_2 + w_2 \bar{w}_2 + (2 + \bar{z}) \bar{w}_2^2) d\bar{z}, \\ dw_2 &= (w_2 \bar{w}_1 - (1 + z) w_2^2) dz + \bar{w}_1 (w_2 + \bar{w}_2) d\bar{z} \end{aligned} \tag{12}$$

такова, что вронскианы по переменным z , \bar{z} , w_2 и \bar{w}_1 совокупностей

$$\{w_1^2 + w_2 \bar{w}_2, w_1(w_2 + \bar{w}_2)\}$$

и

$$\{w_1 w_2 + w_2 \bar{w}_2 + (2 + \bar{z}) \bar{w}_2^2, w_1 \bar{w}_2 - (1 + \bar{z}) \bar{w}_2^2\}$$

обращаются в нуль на интегральном многообразии $w_1 + \bar{w}_2 = 0$.

Следовательно, выполняются необходимые условия существования у системы (12) автономного (1,1)-цилиндричного частного интеграла (теорема 1).

Из системы (7) для дифференциальной системы (12) при

$$H_1: (z, w_1, w_2) \rightarrow (w_1 + \bar{w}_2)(w_1 + w_2), \quad H_2: (z, w_1, w_2) \rightarrow (w_1 + \bar{w}_2)(w_2 + \bar{w}_2)$$

находим решение $\varphi_1: (z, w_1, w_2) \rightarrow 1$, $\varphi_2: (z, w_1, w_2) \rightarrow 1 \quad \forall (z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^3$. Составленное на основании этого решения уравнение Пфаффа (теорема 2)

$$dw_1 + d\bar{w}_2 = 0$$

имеет интегрирующий множитель $\mu: (w_1, w_2) \rightarrow 1$ и общий интеграл

$$f: (w_1, w_2) \rightarrow w_1 + \bar{w}_2 \quad \forall (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2. \quad (13)$$

Таким образом, функция (13) является автономным (1,1)-цилиндричным частным интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (12).

\mathbb{R} -дифференцируемые первые интегралы

Пусть система (1) имеет (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый на области G' первый интеграл

$$F: (z, w) \rightarrow F({}^s z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G'. \quad (14)$$

Тогда, согласно критерию существования первого интеграла, справедлива система тождеств $\mathfrak{X}_{lsk} F({}^s z, {}^k w) = 0 \quad \forall (z, w) \in G'$, $l = \overline{1, 2m}$. Это означает, что вронскианы каждой из совокупностей (4) тождественно равны нулю на G , т.е. выполняется система тождеств (6) на области G при $\Psi_{l\chi} = 0$, $l = \overline{1, 2m}$; обозначим её $(\tilde{6})$. Тем самым, доказаны

Теорема 4. *Для того, чтобы система (1) имела (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый первый интеграл (14), необходимо выполнение системы тождеств $(\tilde{6})$.*

Следствие 4. *Система тождеств $(\tilde{6})$ при $s_2 = 0$, $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия $(s_1, 0)$ -неавтономного $(n - k_1, n)$ -цилиндричного голоморфного первого интеграла (14) у дифференциальной системы (1).*

Следствие 5. *Система тождеств $(\tilde{6})$ при $s_1 = 0$, $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$ -неавтономного $(n, n - k_2)$ -цилиндричного антиголоморфного первого интеграла (14) у системы (1).*

Следствие 6. *Для того, чтобы у системы (1) существовал автономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый на области Ω' пространства \mathbb{C}^n первый интеграл $F: w \rightarrow F({}^k w) \quad \forall w \in \Omega'$ необходимо выполнение системы тождеств $(\tilde{6})$ при $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.*

Пусть \mathbb{R} -дифференцируемые функции $X_{\xi l}: G \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, 2m}$, удовлетворяют условиям $(\tilde{6})$. Составим функциональную систему (7), формально заменив H_l , $l = \overline{1, 2m}$, нулём; обозначим такую систему $(\tilde{7})$.

Теорема 5. *Для того, чтобы система (1) имела \mathbb{R} -дифференцируемый первый интеграл (14), необходимо и достаточно существования функций ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и $\lambda\varphi$, удовлетворяющих системе $(\tilde{7})$, таких, что функция (14) является общим интегралом уравнения Пфаффа (8).*

Доказательство теоремы 5 основано на тех же принципах, что и доказательство теоремы 2. Аналогично теореме 3 доказывается

Теорема 6. *Пусть у системы $(\tilde{7})$ существуют q не являющихся линейно связанными на области G' решений (10), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (11) имеют общие \mathbb{R} -дифференцируемые интегралы*

$$F_\varepsilon: ({}^{s_z}, {}^k w) \rightarrow F_\varepsilon({}^{s_z}, {}^k w) \quad \forall ({}^{s_z}, {}^k w) \in G^r, \quad \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимыми на области G^r .

Для системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= \frac{2}{z} w_2 dz - \left(\frac{1}{z} w_1 + 2w_2^2 + 2z w_2 \bar{w}_1 \right) d\bar{z}, \\ dw_2 &= -dz + \bar{z}(w_2 + z\bar{w}_1) d\bar{z} \end{aligned} \tag{15}$$

выполняются необходимые условия (теорема 4) существования $(1,0)$ -неавтономного $(2,0)$ -цилиндричного первого интеграла, так как вронскианы по переменным \bar{z} , w_1 и w_2 совокупностей

$$\left\{ 1, -\frac{1}{z} \bar{w}_1 - 2\bar{w}_2^2 - 2\bar{z} w_1 \bar{w}_2, z(\bar{z} w_1 + \bar{w}_2) \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{2\bar{w}_2}{z}, -1 \right\}$$

равны нулю на любой области G из множества $\{(z, w_1, w_2): z \neq 0\}$.

Из функциональной системы $(\tilde{7})$ для дифференциальной системы (15)

$$\psi_1 - \left(\frac{1}{z} \bar{w}_1 + 2\bar{w}_2^2 + 2\bar{z} w_1 \bar{w}_2 \right) \varphi_1 + z(\bar{w}_2 + \bar{z} w_1) \varphi_2 = 0,$$

$$-2w_1 \bar{w}_2 \varphi_1 + z w_1 \varphi_2 = 0, \quad -2\bar{z} \bar{w}_2 \varphi_1 + z \bar{z} \varphi_2 = 0, \quad \frac{2}{z} \bar{w}_2 \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

находим решение $\psi_1: (z, w_1, w_2) \rightarrow \bar{w}_1$, $\varphi_1: (z, w_1, w_2) \rightarrow z$, $\varphi_2: (z, w_1, w_2) \rightarrow 2\bar{w}_2$ $\forall (z, w_1, w_2) \in G$. Построенное на его основании уравнение Пфаффа

$$\bar{w}_1 dz + z d\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2 d\bar{w}_2 = 0$$

имеет общий интеграл (теорема 5)

$$F: (z, w_1, w_2) \rightarrow z\bar{w}_1 + \bar{w}_2^2 \quad \forall (z, w_1, w_2) \in G. \quad (16)$$

Так как скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X}_1(z, w_1, w_2), \mathfrak{X}_2(z, w_1, w_2)] = & (1 + 2z\bar{w}_2(\bar{z}w_1 + \bar{w}_2))(2w_2\partial_{w_1} - \bar{z}\partial_{w_2}) - \\ & - (1 + 2\bar{z}w_2(w_2 + z\bar{w}_1))(2\bar{w}_2\partial_{\bar{w}_1} - z\partial_{\bar{w}_2}) \quad \forall (z, w_1, w_2) \in G \end{aligned}$$

не равны нулю-оператору на области G , то система уравнений в полных дифференциалах (15) не является вполне разрешимой, а её интегральный базис состоит не более, чем из одного первого интеграла.

Таким образом, (1,0)-неавтономный (2,0)-цилиндричный первый интеграл (16) образует интегральный базис системы (15) на любой области G из множества $\{(z, w_1, w_2): z \neq 0\}$ пространства \mathbb{C}^3 .

\mathbb{R} -дифференцируемые последние множители

Допустим теперь, что система (1) имеет \mathbb{R} -дифференцируемый (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный последний множитель

$$\mu: (z, w) \rightarrow \mu({}^{s_z}z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G'. \quad (17)$$

Тогда, согласно критерию существования последнего множителя, справедлива система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}\mu({}^{s_z}z, {}^k w) + \mu({}^{s_z}z, {}^k w) \operatorname{div} \mathfrak{X}_l(z, w) = 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m}. \quad (18)$$

Отсюда методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что выполняется система

$$\begin{aligned} W_\chi(1, {}^\lambda X^\theta(z, w), \operatorname{div} \mathfrak{X}_\theta(z, w)) &= 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad \theta = \overline{1, s_1}, \\ W_\chi(1, {}^\lambda X^\eta(z, w), \operatorname{div} \mathfrak{X}_\eta(z, w)) &= 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \\ W_\chi(1, {}^\lambda X^{m+j_g}(z, w), \operatorname{div} \mathfrak{X}_{m+j_g}(z, w)) &= 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad g = \overline{1, s_2}, \\ W_\chi({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z, w), \operatorname{div} \mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z, w)) &= 0 \quad \forall (z, w) \in G', \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Поэтому имеют место

Теорема 7. Для того, чтобы система (1) имела (s_1, s_2) -неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый последний множитель (17), необходимо выполнение системы тождеств (19).

Следствие 7. Система тождеств (19) при $s_2 = 0, k_2 = 0$ является необходимым условием наличия $(s_1, 0)$ -неавтономного $(n - k_1, n)$ -цилиндричного голоморфного последнего множителя (17) у системы (1).

Следствие 8. Система тождеств (19) при $s_1 = 0, k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$ -неавтономного $(n, n - k_2)$ -цилиндричного антиголоморфного последнего множителя (17) у системы (1).

Следствие 9. Для того, чтобы у системы (1) существовал автономный $(n - k_1, n - k_2)$ -цилиндричный \mathbb{R} -дифференцируемый на области Ω' пространства \mathbb{C}^n последний множитель $\mu: w \rightarrow \mu({}^k w) \forall w \in \Omega'$ необходимо выполнение системы тождеств (19) при $s_1 = 0, s_2 = 0$.

Пусть \mathbb{R} -дифференцируемые функции $X_{\xi l}: G \rightarrow \mathbb{C}, \xi = \overline{1, n}, l = \overline{1, 2m}$, удовлетворяют условиям (19). Составим функциональную систему (7), формально считая $H_l(z, w) = -\operatorname{div} \mathfrak{X}_l(z, w), l = \overline{1, 2m}$; обозначим её ($\widehat{7}$).

Теорема 8. Для того, чтобы система (1) имела последний множитель (17), необходимо и достаточно существования функций ${}^{s_1}\psi, {}^{s_2}\psi$ и ${}^\lambda\varphi$, удовлетворяющих системе ($\widehat{7}$), таких, что составленное на их основании уравнение Пфаффа (8) является точным на области G^r . При этом последний множитель (17) системы (1) представим в виде

$$\mu: (z, w) \rightarrow \exp g({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad (20)$$

где функция

$$g: ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \rightarrow \int {}^{s_1}\psi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d{}^{s_1}z + {}^{s_2}\psi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d\overline{{}^{s_2}z} + {}^{k_1}\varphi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d{}^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) d\overline{{}^{k_2}w}.$$

Доказательство. Необходимость. Если у система (1) существует \mathbb{R} -дифференцируемый последний множитель (17), то верна система тождеств (18). Выполним почленное деление тождеств (18) на $\mu({}^{s_1}z, {}^{k_1}w)$, а затем процесс дифференцирования, описанный при доказательстве теоремы 2, полученных тождеств по χ . В результате убеждаемся, что векторные функции

$${}^{s_1}\psi: ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \rightarrow \partial_{s_1 z} \ln \mu({}^{s_1}z, {}^{k_1}w), \quad {}^{s_2}\psi: ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \rightarrow \partial_{\overline{{}^{s_2}z}} \ln \mu({}^{s_1}z, {}^{k_1}w),$$

$${}^{k_1}\varphi: ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \rightarrow \partial_{k_1 w} \ln \mu({}^{s_1}z, {}^{k_1}w), \quad {}^{k_2}\varphi: ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \rightarrow \partial_{\overline{{}^{k_2}w}} \ln \mu({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \quad \forall ({}^{s_1}z, {}^{k_1}w) \in G^r$$

являются решением системы $(\widehat{7})$. Уравнение Пфаффа (8) является точным, а последний множитель системы (1) строится по формуле (20).

Достаточность. Пусть ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$, $\lambda\varphi$ — решение системы $(\widehat{7})$, а уравнение Пфаффа (8), составленное на его основании, является точным на области G^r . Тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} \partial_{s_1 z} g(s_z, {}^k w) &= {}^{s_1}\psi(s_z, {}^k w), & \partial_{\overline{s_2 z}} g(s_z, {}^k w) &= {}^{s_2}\psi(s_z, {}^k w) \quad \forall (s_z, {}^k w) \in G^r, \\ \partial_{k_1 w} g(s_z, {}^k w) &= {}^{k_1}\varphi(s_z, {}^k w), & \partial_{\overline{k_2 w}} g(s_z, {}^k w) &= {}^{k_2}\varphi(s_z, {}^k w) \quad \forall (s_z, {}^k w) \in G^r. \end{aligned}$$

Отсюда в силу $(\widehat{7})$ получаем, что имеет место система тождеств (18). Следовательно, функция (20) будет последним множителем системы (1). ■

Подобно теореме 3 доказывается

Теорема 9. Пусть у системы $(\widehat{7})$ существуют q не являющихся линейно связанными на области G' решений (10), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (11) являются точными на области G^r . Тогда \mathbb{R} -дифференцируемые последние множители системы (1)

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon: (z, w) \rightarrow \exp \left(\int {}^{s_1}\psi^\varepsilon(s_z, {}^k w) d^{s_1 z} + {}^{s_2}\psi^\varepsilon(s_z, {}^k w) d\overline{s_2 z} + \right. \\ \left. + {}^{k_1}\varphi^\varepsilon(s_z, {}^k w) d^{k_1 w} + {}^{k_2}\varphi^\varepsilon(s_z, {}^k w) d\overline{k_2 w} \right) \quad \forall (z, w) \in G', \quad \varepsilon = \overline{1, q}, \end{aligned}$$

являются функционально независимыми на области G' .

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_1(1 + 2\overline{w}_2) dz + w_1(1 + 2w_2) d\overline{z}, \\ dw_2 &= w_2(w_1 - 1) dz - w_2(w_2 + \overline{w}_1) d\overline{z} \end{aligned} \tag{21}$$

такова, что у совокупностей $\{w_1(1 + 2\overline{w}_2), 1 + 2\overline{w}_2\}$ и $\{w_1(1 + 2w_2), 1 + 2w_2\}$ вронскианы по переменным $z, \overline{z}, w_2, \overline{w}_1$ и \overline{w}_2 равны нулю на \mathbb{C}^3 .

Значит, выполняются необходимые условия существования у системы (21) автономного (1,2)-цилиндричного последнего множителя (следствие 9).

Из функциональной системы $(\widehat{7})$ для системы (21)

$$w_1(1 + 2\overline{w}_2) \varphi = -(1 + 2\overline{w}_2), \quad 2w_1 \varphi = -2, \quad w_1(1 + 2w_2) \varphi = -(1 + 2w_2)$$

находим решение $\varphi: (w_1, w_2) \rightarrow -\frac{1}{w_1} \quad \forall (w_1, w_2) \in \Omega$, где Ω — любая область из множества $\{(w_1, w_2): w_1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{C}^2 .

Тогда автономный голоморфный последний множитель (теорема 8) системы уравнений в полных дифференциалах (21) имеет вид

$$\mu: (w_1, w_2) \rightarrow \frac{1}{w_1} \quad \forall (w_1, w_2) \in \Omega.$$

Список литературы

1. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. В 2-х ч. Ч. 1. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. В 2-х ч. Ч. 2. М.: Наука, 1985. 464 с.
3. *Положий Г.Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Из-во КГУ, 1965. 444 с.
4. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
6. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Об \mathbb{R} -голоморфных решениях системы уравнений в полных дифференциалах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 124–126.
7. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* \mathbb{R} -голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 447–452.
8. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы \mathbb{R} -линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларусі. 2004. Т. 48, № 1. С. 49–52.
9. *Проневич А.Ф.* Интегралы систем уравнений в частных производных с \mathbb{R} -линейными коэффициентами // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 45–52.
10. *Горбузов В.Н.* Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах: монография. Гродно: ГрГУ, 2005. 273 с.
11. *Гурса Э.* Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 2. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 563 с.

12. Горбузов В.Н. Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах// Дифференциальные уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru/journal>). 2000. № 2. С. 1–36.

13. Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем: монография. Гродно: ГрГУ, 2006. 447 с.

14. Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во БГУ, 1981. 104 с.

15. Горбузов В.Н. Автономность системы уравнений в полных дифференциалах// Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 149–156.

16. Проневич А.Ф. \mathbb{R} -дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ А.Ф. Проневич. Гродно, 2005. 95 л.

17. Горбузов В.Н. Математический анализ: теория поля. Гродно: ГрГУ, 2000. 627 с.