



УДК 517.977.58

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО МИНИМУМУ РАСХОДА РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Г.В.ШЕВЧЕНКО

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4  
Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,  
отдел теоретической кибернетики,  
e-mail: shevch@math.nsc.ru

### Аннотация.

Предлагается итерационный метод решения нелинейных задач минимизации расхода ресурсов. Он является обобщением метода решения линейных задач минимизации ресурсов [1] на класс нелинейных систем с разделенной по состоянию и управлению правой частью, линейной по управлению.

## 1 Постановка задачи и геометрическая интерпретация

Пусть управляемый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(x) + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор состояния объекта,  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$  – непрерывно дифференцируемая вектор-функция,  $f(0) = 0$  и  $f(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ ,  $B(t)$  – непрерывная матрица размера  $n \times s$ ,  $u \in \mathbb{R}^s$  – кусочно-непрерывное управление, стесненное ограничением

$$|u_j(t)| \leq 1 \quad (j = \overline{1, s}). \quad (2)$$

**Задача.** Требуется найти допустимое управление  $u^0(t)$  ( $t \in [0, T]$ ), переводящее систему (1) из начального состояния  $x(0) = x^0$  за время  $T$  в начало координат и минимизирующее функционал

$$I(u) = \int_0^T \sum_{j=1}^s \alpha_j |u_j(t)| dt, \quad (3)$$

где  $\alpha_j \geq 0$  – заданные действительные числа, причем  $\sum_{j=1}^s \alpha_j \neq 0$ .

Предполагается, что система (1) управляема в начало координат и  $T > T_{\text{опт}}$ , где  $T_{\text{опт}}$  – время оптимального по быстродействию перевода системы (1) из состояния  $x(0) = x^0$  в начало координат.

Обозначим через  $\mathfrak{R}(T)$  область достижимости системы (1) из начального состояния  $x(0) = x^0$  за время  $T$  всевозможными допустимыми управлениями. В силу того, что  $T > T_{\text{опт}}$ ,  $f(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$ , имеет место включение  $0 \in \text{int } \mathfrak{R}(T)$ . Через  $\text{int } A$  здесь и далее обозначается внутренность множества  $A$ . В силу непрерывности правой части системы (1) для поставленной задачи область достижимости  $\mathfrak{R}(T)$  компактна и непрерывно зависит от  $T$ . Более того, поскольку предполагается, что система (1) управляема в начало координат, то  $\mathfrak{R}(T)$  тело.

Введём согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [2] сопряжённую систему

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \psi_j(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

и выпишем гамильтониан задачи

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = - \sum_{j=1}^s \alpha_j |u_j(t)| + (\psi(t), f(x(t))) + (\psi(t), B(t)u(t)). \quad (5)$$

Тогда для оптимальности управления  $u^*(t)$ , ( $t \in [0, T]$ ) и траектории  $x^*(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) необходимо и достаточно существования такой ненулевой

вектор-функции  $\psi^*(t)$ , являющейся решением сопряжённой системы (4) при некотором вполне определённом граничном условии

$$\psi(T) = c^*,$$

что при почти всех  $t \in [0, T]$  функция  $H(\psi^*(t), x^*(t), u)$  по переменной

$$u \in U = \{u \in \mathbb{R}^s \mid |u_j| \leq 1 \ (j = \overline{1, s})\}$$

достигает в точке  $u = u^*(t)$  максимума, т.е.

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u).$$

Отсюда следует, что оптимальное управление имеет следующий вид

$$u_j(t) = \begin{cases} -1, & (\psi(t), B_j(t)) < -\alpha_j, \\ 0, & -\alpha_j \leq (\psi(t), B_j(t)) \leq \alpha_j, \ j = \overline{1, s}, \\ 1, & (\psi(t), B_j(t)) > \alpha_j, \end{cases} \quad (6)$$

где  $B_j(t)$  –  $j$ -й столбец матрицы  $B(t)$  ( $j = \overline{1, s}$ ),  $\psi(t)$  – решение сопряжённой системы (4) с граничным условием

$$\psi(T) = c. \quad (7)$$

Здесь  $c \in \mathbb{R}^n$  – некоторый ненулевой вектор.

В силу однородности системы (4) в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только граничных условий (7) с единичными нормами  $\|c\| = 1$ , заменив (6) на следующие выражения

$$u_j(t) = \begin{cases} -1, & (\psi(t), B_j(t)) < -\mu\alpha_j, \\ 0, & -\mu\alpha_j \leq (\psi(t), B_j(t)) \leq \mu\alpha_j, \ (j = \overline{1, s}) \\ 1, & (\psi(t), B_j(t)) > \mu\alpha_j, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mu \geq 0$  – действительное число.

**Замечание.** Если  $T = T_{\text{онт}}$ , оптимальное управление будет релейным. А это в силу (8) и непрерывности выражений  $(\psi(t), B_j(t))$ , ( $j = \overline{1, s}$ ) означает, что  $\mu = 0$ . Но тогда соответствующее ему  $\psi(T) = c$  для (6) имеет норму  $\|c\| = \infty$ . Поэтому при  $T > T_{\text{онт}}$ , но близких к  $T_{\text{онт}}$ , возникают большие трудности, связанные с очень большими нормами граничных условий сопряжённой системы при использовании представления (6). Представление (8) позволяет обойти эти трудности.

Пусть вектор-функции  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$ ,  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  и допустимое управление  $\bar{u} = \bar{u}(t)$  таковы, что справедливы равенства

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}) + B(t)\bar{u}(t), \\ \dot{\bar{\psi}}_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_i} \bar{\psi}_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{x}(0) = x^0, \quad \bar{\psi}(T) = c,$$

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} -1, & (\bar{\psi}(t), B_j(t)) < -1, \\ 1, & (\bar{\psi}(t), B_j(t)) \geq 1, \end{cases} \quad j = \overline{1, s}, \quad (10)$$

при любом  $t \in [0, T]$ . Обозначим через  $u(t, c, \mu)$  управление, компоненты которого удовлетворяют (8) при  $\psi = \bar{\psi}$  и действительном числе  $\mu \geq 0$ . Из (8) тогда следует, что для  $\alpha_j > 0$  при  $\mu \geq \mu_j(c) \triangleq \frac{1}{\alpha_j} \max_{0 \leq t \leq T} |(\bar{\psi}(t), B_j(t))|$  имеет место тождество  $u_j(t, c, \mu) \equiv 0$  ( $t \in [0, T]$ ). А при  $\mu \geq \mu(c) \triangleq \max_{j \in \{i=\overline{1, s} | \alpha_i > 0\}} \mu_j(c)$ , все компоненты вектор-функции  $u(t, c, \mu)$ , для которых соответствующие  $\alpha_j > 0$ , тождественно равны нулю.

Рассмотрим функцию

$$G(c, \mu) = I(u(t, c, \mu)) = \int_0^T \sum_{j=1}^s \alpha_j |u_j(t, c, \mu)| dt \quad (11)$$

при фиксированном  $c \in \mathbb{R}^n$  ( $\|c\| = 1$ ). Функция  $G(c, \mu)$  на интервале  $[0, \mu(c)]$  является непрерывной по  $\mu$  в силу (8). Более того, если  $\mu_1 > \mu_2$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in [0, \mu(c)]$ , то  $G(c, \mu_1) > G(c, \mu_2)$ . Таким образом, функция  $G(c, \mu)$  на  $[0, \mu(c)]$  строго убывает по  $\mu$ . Следовательно, при любом фиксированном  $c \in \mathbb{R}^n$  ( $\|c\| = 1$ ) и любом положительном числе  $\mathfrak{J} \leq \mathfrak{J}_{\max} \triangleq \sum_{j=1}^s \alpha_j \cdot T$  существует единственное число  $\mu_*(c) \in [0, \mu(c)]$ , такое, что  $G(c, \mu_*(c)) = \mathfrak{J}$ .

Пусть  $\Omega(\mathfrak{J})$  — множество точек, в которые можно попасть из начального состояния  $x(0) = x^0$  допустимыми управлениями за время  $T$  со значением функционала (3) меньшим или равным  $\mathfrak{J}$ . Другими словами,

$$\Omega(\mathfrak{J}) = \{x \in \mathfrak{R}(T) \mid x = x(T, v), v = v(t) \in U, t \in [0, T], I(v) \leq \mathfrak{J}\},$$

где  $x(T, v)$  — решение системы (1) в момент времени  $t = T$  при допустимом управлении  $u = v$ . Очевидно, что  $\Omega(\mathfrak{J}_1) \subset \Omega(\mathfrak{J}_2)$  при  $\mathfrak{J}_1 < \mathfrak{J}_2$ .

Как отмечалось выше, начало координат пространства  $\mathbb{R}^n$  является внутренней точкой области достижимости  $\mathfrak{R}(T)$ . В свою очередь, область достижимости  $\mathfrak{R}(T)$  совпадает с  $\Omega(\mathcal{I}_{\max})$ . Поэтому существует единственное такое число  $\mathcal{I}_{\min}$ ,  $0 < \mathcal{I}_{\min} < \mathcal{I}_{\max}$ , при котором 0 лежит на границе множества  $\Omega(\mathcal{I}_{\min})$ . Таким образом, исходная задача (1)–(3) эквивалентна задаче поиска такого числа  $\mathcal{I}_{\min}$ .

Для решения поставленной задачи предлагается итеративный метод. Он основан на симплексных покрытиях множеств  $\Omega(\mathcal{I})$ . Описание и обоснование предлагаемого метода требует введения некоторых понятий.

Пусть  $z^1, \dots, z^{n+1} \in \mathbb{R}^n$  — такие различные точки, что линейная выпуклая оболочка  $\sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}]$  этих точек является телом в  $\mathbb{R}^n$ . Будем называть множество  $\sigma$   $n$ -мерным симплексом с вершинами  $z^1, \dots, z^{n+1}$ . Два  $n$ -мерных симплекса  $\sigma^1 = [z^1, \dots, z^{n+1}]$  и  $\sigma^2 = [v^1, \dots, v^{n+1}]$  называются смежными, если у них  $n$  общих вершин и их пересечение есть  $(n - 1)$ -мерный симплекс. Из определения следует, что их пересечение является общей гранью максимальной размерности симплексов  $\sigma^1$  и  $\sigma^2$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное тело,  $\sigma^0 = [z_0^1, \dots, z_0^{n+1}]$  есть  $n$ -мерный симплекс с вершинами, лежащими на границе  $\Omega$ . По каждой его грани максимальной размерности  $\sigma_j^0 = [z_0^1, \dots, z_0^{j-1}, z_0^{j+1}, \dots, z_0^{n+1}]$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ) строим смежный ему симплекс с вершинами  $z_0^1, \dots, z_0^{j-1}, \tilde{z}^j, z_0^{j+1}, \dots, z_0^{n+1}$ , у которого “новая” вершина  $\tilde{z}^j$  является граничной точкой  $\Omega$ , максимально удалена от гиперплоскости, проходящей через остальные вершины, и расположена по разные стороны с точкой  $z_0^j$  относительно этой гиперплоскости. Это означает, что для построенного симплекса выполнены следующие условия: существуют такое число  $d \neq 0$  и такой вектор коэффициентов  $\tilde{c}^j \in \mathbb{R}^n$  указанной гиперплоскости, что

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^j, z_0^i) &= d, \quad (i = \overline{1, n+1}, i \neq j), \\ (\tilde{c}^j, z_0^j) &< d, \\ (\tilde{c}^j, \tilde{z}^j) &= \max_{x \in \Omega} (\tilde{c}^j, x) > d, \quad \tilde{z}^j \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Назовем построенные симплексы, которые смежны симплексу  $\sigma^0$  симплексами 1-го слоя, а симплекс  $\sigma^0$  будем считать симплексом 0-го слоя.

Затем для каждого симплекса 1-го слоя строим по его  $(n - 1)$ -мерным граням, которые не являются общими с  $(n - 1)$ -мерными гранями симплекса  $\sigma^0$ , по той же схеме смежные симплексы. Построенные симплексы составят 2-ой слой. Ясно, что во втором слое содержится ровно  $n(n + 1)$  симплекс.

Аналогично для каждого симплекса  $k$ -го слоя ( $k \geq 2$ ) строятся смежные ему симплексы  $(k + 1)$ -го слоя.

Обозначим через  $\mathfrak{S}_k$  — объединение всех симплексов  $k$ -го слоя. Ясно, что в  $k$ -м слое будет  $n^{k-1}(n + 1)$  симплексов. По построению в силу компактности  $\Omega$  видно, что

$$\text{co } \Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k,$$

где  $\text{co } \Omega$  — выпуклая оболочка множества  $\Omega$ .

Таким образом, множество  $\Omega$  оказывается покрытым  $n$ -мерными симплексами с вершинами на границе  $\Omega$ . (В дальнейшем, говоря о покрытии  $n$ -мерными симплексами, мы подразумеваем построенное покрытие.) Имеет место, следовательно,

**Теорема 1** (о покрытии). *Внутренность любого компактного тела  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  можно покрыть  $n$ -мерными симплексами с вершинами на границе  $\Omega$ .*

Из теоремы вытекает

**Следствие 1.** *Пусть  $\Omega$  — компактное тело в  $\mathbb{R}^n$  и  $z^0 \in \text{int } \Omega$ . Тогда для любого покрытия  $\mathfrak{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k$  тела  $\Omega$  существуют такое конечное  $k_0 \geq 0$  и такой  $n$ -мерный симплекс  $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$ , что  $z^0 \in \sigma$ .*

Область достижимости при сделанных предположениях о линейности по управлению правой части и телесности множества  $U$  является компактным телом в  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно, к ней применима теорема о покрытии и ее следствие.

Предлагаемый метод решения основан на построении последовательности симплексов  $\{\sigma^k\}$  с вершинами, лежащими на границе множеств  $\Omega(\mathfrak{J})$ . Перед его полным формальным описанием дадим краткое.

Полагаем  $\mathfrak{J} := \mathfrak{J}_{\max}$ . На первом этапе строится последовательность смежных симплексов  $\{\sigma^k\}$ ,  $\overline{\rho(\sigma^k)} \geq \overline{\rho(\sigma^{k+1})}$ , где  $\rho(\sigma^k)$  — расстояние от симплекса  $\sigma^k$  до начала координат, с вершинами, лежащими на границе области достижимости  $\mathfrak{R}(T)$ , до момента, когда очередной построенный симплекс  $\sigma^{k_0}$  будет содержать 0.

Отметим, что в силу следствия 1 эта последовательность конечна. Вершины симплексов построенной последовательности являются решениями задачи Коши (1) при некоторых вполне определенных релейных управлениях.

Пусть  $z^i = x(T, u^i)$  — вершины симплекса  $\sigma^{k_0}$  (здесь и далее через  $x(T, u^i)$

обозначается решение задачи Коши (1) в момент времени  $t = T$  при воздействии управления  $u = u^i$ ;  $u^i = u^i(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — релейное допустимое управление, т. е.

$$u_j^i(t) = \max_{u \in U}(\psi^i(t), B_j(t)), \quad j = \overline{1, s},$$

где  $\psi(t)$  — решение сопряженной системы (4) с начальным условием  $\psi(0) = \tilde{c}^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ;  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n+1}^0$  — решение следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \quad (12)$$

Так как  $0 \in \text{int } \sigma^{k_0}$ , то все  $\lambda_i^0 \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Второй этап. Полагаем  $\bar{c} := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 \tilde{c}^i$  и находим решение системы (9) с начальными условиями  $\bar{x}(0) = x^0$ ,  $\bar{\psi}(0) = \bar{c}$  при управлении (10)  $\bar{u} = \bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_s(t))$ ,  $t \in [0, T]$ . Затем полагаем  $c := \bar{\psi}(T)$  и находим такое число  $\mu_0(c)$ ,  $0 \leq \mu_0(c) < \mu(c)$ , при котором выполнено равенство

$$(c, x(T, u(t, c, \mu_0(c)))) = 0. \quad (13)$$

Пусть  $z^* = x(T, u(t, c, \mu_0(c)))$ . Если  $\|z^*\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — необходимая точность попадания в начало координат, то процесс вычислений заканчивается. Полученное управление  $u(t, c, \mu_0(c))$ ,  $t \in [0, T]$ , — приближенно оптимально, а  $I(u(t, c, \mu_0(c)))$  — приближенно оптимальное значение функционала (3).

Если  $\|z^*\| > \varepsilon$ , то среди точек  $z^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$  выбираем  $n$  точек таких  $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$ , при которых симплексу  $\sigma^* = [z^{i_1}, \dots, z^{i_n}, z^*]$  принадлежит 0. Точки  $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}, z^*$  и соответствующие им параметры  $(\tilde{c}^{i_1}, \dots, \tilde{c}^{i_n}, \tilde{c}^{i_{n+1}} = \bar{c})$  перенумеровываются по порядку и с симплексом  $\sigma^*$  аналогично симплексу  $\sigma^{k_0}$  выполняются операции второго этапа

## 2 Вычислительный алгоритм решения задачи (1)–(3)

Введем следующие обозначения:

- $c^{(k)}$  —  $k$ -е приближение оптимальных значений начальных условий для сопряженной системы (4).

- $u_0^k = u_0^k(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — допустимое управление вида

$$u_0^k(t) = \arg \max_{u \in U} (\bar{\psi}_k(t), B(t)u),$$

где  $\bar{\psi}_k$  — решение сопряженной системы (4) с начальным условием  $\psi(0) = c^{(k)}$ .

- $\mu^1, \mu^2$  — нижняя и верхняя граница локализации решения  $\mu$  уравнения (см. (13))

$$(\bar{\psi}_k(T), x(T, u(t, c^{(k)}), \mu)) = 0. \quad (14)$$

- $k$  — номер итерации.

### АЛГОРИТМ

1. Полагаем  $k := 1$ ;  $c^{(k)} := -x^0 / \|x^0\|$ ; и  $p := 1$ .
2. Интегрируя совместно прямую и сопряженную системы (1) и (4) с начальными условиями  $x(0) = x^0$  и  $\psi(0) = c^{(k)}$  при управлении  $u = u_0^k$  по  $t$  от 0 до  $T$ , находим их решения  $x(T, u_0^k)$  и  $\bar{\psi}_k(T)$  в момент времени  $t = T$  и полагаем  $z^p := x(T, u_0^k)$ ,  $\tilde{c}^p := c^{(k)} / \|c^{(k)}\|$  и  $k := k + 1$ .
3. Если  $p \leq n$  и система линейных алгебраических уравнений

$$(c, z^i) = -1, \quad i = \overline{1, p}, \quad (15)$$

совместна, то, найдя ее решение  $\tilde{c}$ , переходим к шагу 7.

4. Находим решение  $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$  системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i z^i = 0, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1. \quad (16)$$

Если мощность множества индексов  $\Lambda = \{i : \lambda_i^0 < 0\}$  равна 1, то полагаем  $i_0 := i \in \Lambda$  и переходим к шагу 6. Если множество  $\Lambda$  пусто, то переходим к шагу 8.

5. Находим решение  $\eta^* = (\eta_1^*, \dots, \eta_p^*)$  задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями

$$\min_{\substack{\sum_{i=1}^p \eta_i = 1, \\ \eta_i \geq 0}} \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^p \eta_i z^i \right\|^2. \quad (17)$$

(Заметим, что задачу (17) можно решить с помощью конечного метода [3].) Берем любой индекс  $i_0 \in \{i : \eta_i^* = 0\} \cap \{i : \lambda_i^0 < 0\}$ .

6. Полагаем  $z^i := z^{i+1}$ ,  $\tilde{c}^i := \tilde{c}^{i+1}$  ( $i = \overline{i_0, p-1}$ );  $p := p-1$  и переходим к шагу 4.
7. Интегрируем совместно системы (1), (4) в обратном времени от  $T$  до 0 с граничными условиями  $x(T) = z^p$ ,  $\psi(T) = \tilde{c}$  при управлении  $u = u^p$ . Полагаем  $c^{(k)} := \psi(0)$ ,  $p := p+1$  и переходим к шагу 2.
8. Полагаем  $c^* := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 \tilde{c}^i / \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 \tilde{c}^i \right\|$ .
9. Интегрируя совместно прямую и сопряженную системы (1) и (4) с начальными условиями  $x(0) = x^0$  и  $\psi(0) = c^*$  при управлении  $u = \bar{u}$  (см. (10)) по  $t$  от 0 до  $T$ , находим решение сопряженной системы (4)  $\bar{\psi}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Полагаем  $\bar{c} := \bar{\psi}(T)$ ,  $\mu^1 := 0$ ,  $\mu^2 := \mu(\bar{c})$ .
10. Полагаем  $\mu := 0.5 * (\mu^1 + \mu^2)$  и находим управление  $u(t, \bar{c}, \mu)$ ,  $t \in [0, T]$  и соответствующий этому управлению правый конец траектории системы (1), т. е.  $z_\mu = x(T, u(t, c, \mu))$ .
11. Если  $\|z_\mu\| \leq \varepsilon$ , то процесс вычислений заканчивается. Полученное управление  $u(t, \bar{c}, \mu)$ ,  $t \in [0, T]$ , приближенно оптимально, а  $I(u(t, \bar{c}, \mu))$  приближенно оптимальное значение функционала (3).
12. Если  $(\bar{c}, z_\mu) > 0$ , то полагаем  $\mu^1 := \mu$ , иначе  $\mu^2 := \mu$ .
13. Находим решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = z_\mu, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \quad (16^*)$$

Пусть ее решение  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n+1}^*$ .

14. Если все  $\lambda_i^* \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , то полагаем  $i_0 := \arg \min_{\{i=\overline{1, n+1}: \lambda_i^* > 0\}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*$ ,  $\gamma := \lambda_{i_0}^0 / \lambda_{i_0}^*$ , в противном случае переходим к шагу 15. Далее полагаем  $z^{i_0} := z_\mu$ ,  $\tilde{c}^{i_0} := c^*$ ,  $\lambda_i^0 := \lambda_i^0 - \gamma \lambda_i^*$ ,  $i = \overline{1, n+1}$  и  $i \neq i_0$ ,  $\lambda_{i_0}^0 := \gamma$ . Если  $\lambda_{i_0}^0 = 0$ , полагаем  $k := k+1$ ,  $c^* := \tilde{c}^j$ , где  $j = \arg \max_{i=\overline{1, n+1}} \lambda_i^0$ , и переходим к шагу 9. Если  $|\lambda_{i_0}^* - 1| > \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 > 0$  — заданное достаточно малое число, полагаем  $k := k+1$  и переходим к шагу 8. Если хотя бы для одного  $i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , величина  $\lambda_i^0$  равна нулю, переходим к шагу 10. В

противном случае находим решение  $\tilde{c}$  системы линейных алгебраических уравнений

$$(c, \tilde{x} + 0.5 * (z^i - \tilde{x})) = -1, i \neq i_1, 1 \leq i \leq n + 1,$$

где  $i_1 = \arg \min_{i=1, n+1} \lambda_i^0$ ,  $\tilde{x}$  — правый конец траектории свободного движения системы (1) (при управлении  $u = u(t) \equiv 0, t \in [0, T]$ ), и нормируем его. Если  $(\tilde{c}, \tilde{x}) < 0$ , меняем знак у вектора  $\tilde{c}$ . Интегрируем совместно системы (1), (4) в обратном времени от  $T$  до 0 с граничными условиями  $x(T) = z_\mu, \psi(T) = \tilde{c}$  при управлении  $u = u(t, c^*, \mu)$ . Далее полагаем  $k := k + 1, c^* := (\psi(0) + \lambda_{i_1}^0 \tilde{c}^{i_1} + \lambda_j^0 \tilde{c}^j) / \|\psi(0) + \lambda_{i_1}^0 \tilde{c}^{i_1} + \lambda_j^0 \tilde{c}^j\|$ , где  $j = \arg \max_{i=1, n+1} \lambda_i^0$ , и переходим к шагу 9.

15. Если  $|(\bar{c}, z_\mu)| > \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  — заданная априори точность выполнения равенства (14), то переходим к шагу 10.
16. Находим минимальное такое число  $\tau, 0 < \tau \leq 1$ , что для каждого  $i = \overline{1, n+1}: \tau \lambda_i^0 + (1 - \tau) \lambda_i^* \geq 0$ . Далее, полагаем  $\lambda_i^* := \tau \lambda_i^0 + (1 - \tau) \lambda_i^*$ ,  $i = \overline{1, n+1}, i_0 := \arg \min_{\{i=\overline{1, n+1}: \lambda_i^* > 0\}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*, z^{i_0} := z_\mu, \tilde{c}^{i_0} := c^*$ . Затем находим решение  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n+1}^0)$  системы уравнений (16) и переходим к шагу 8.

Сделаем некоторые замечания к алгоритму.

Отметим, что не требуется хранить все симплексы генерируемой алгоритмом последовательности симплексов. Сохраняется только последний построенный симплекс, точнее его вершины.

Ясно, что шаги 1–7 алгоритма — это первый этап, шаги 8–16 — второй этап (см. предыдущий раздел, краткое описание алгоритма). Отметим, что оно несколько отличается от формального описания алгоритма. В нем описана операция перенумерации точек и им соответствующих сопряженных параметров. Но, очевидно, можно их и не перенумеровывать, что и сделано при формальном описании алгоритма (см. шаг 14).

На первом этапе для построения “новой” вершины симплекса требуются:

- а) задание граничного условия  $\psi(T)$  сопряженной системы (4) (см. шаг 3);
- б) интегрирование в обратном времени (см. шаг 7) сопряженной системы (4) вдоль траектории системы (1), полученной на предыдущей итерации, для того, чтобы получить начальное условие  $c^{(k)}$  (отметим, что запоминания всей траектории системы (1) не требуется. Запоминаются лишь точки переключения соответствующего ей допустимого релейного управления.);

в) интегрирование совместно прямой (1) и сопряженной (4) систем в прямом времени при соответствующем допустимом управлении  $u_k^0$  (см. шаг 2).

Исключением является первая итерация, на которой начальное условие  $c^{(k)}$  задается на шаге 1 и поэтому пункты а и б не требуются.

На втором этапе для построения “новой” вершины симплекса требуются:

а) задание граничного условия  $\psi(0)$  сопряженной системы (4) (см. шаги 8 и 14);

б) интегрирование совместно прямой (1) и сопряженной (4) систем в прямом времени при соответствующем допустимом управлении  $\bar{u}$  (см. шаг 9 и (10)) для того, чтобы получить решение сопряженной системы (4)  $\bar{\psi}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ;

в) поиск решения уравнения (14). Этот поиск эквивалентен многократному нахождению управления  $u(t, c, \mu)$  при различных  $\mu$  и соответствующего ему конца траектории  $z_\mu$  системы (1) (см. шаг 10). Поиск решения уравнения (14) осуществляется на шагах 10–15 алгоритма;

г) замена одной из вершин симплекса на точку  $z_\mu$  (см. шаги 14 и 16 алгоритма).

Теперь перейдем к доказательству сходимости предлагаемого итерационного алгоритма.

### 3 Доказательство сходимости

Пусть  $\sigma = [z^1, \dots, z^p]$  —  $(p - 1)$ -мерный симплекс, где  $z^i \in \mathbb{R}^n$ , ( $i = \overline{1, p}$ ;  $p \leq n + 1$ ).

**Лемма 1** [1]. Система линейных алгебраических уравнений (15) несовместна тогда и только тогда, когда совместна система линейных алгебраических уравнений (16).

**Лемма 2** [1]. Пусть  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$  — решение системы (16), причем  $\lambda_{i_0}^0 < 0$  ( $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ ). Тогда точки  $z^{i_0}$  и 0 лежат в разных полупространствах относительно любой гиперплоскости вида  $(c, x) = -1$ , проходящей через точки  $z^i$ , ( $i \neq i_0$ ;  $i = \overline{1, p}$ ).

**Лемма 3** [1]. Пусть  $\rho(\sigma) = \|x^*\|$ ,  $x^* \in \sigma$ ,  $x^* = \sum_{i=1}^p \eta_i^* z^i$ ,  $\sum_{i=1}^p \eta_i^* = 1$ ,  $\eta_i^* \geq 0$ , и пусть  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$  решение системы (16), причем  $\lambda_{i_1}^0, \dots, \lambda_{i_l}^0 < 0$ . Тогда среди  $\eta_{i_1}^*, \dots, \eta_{i_l}^*$  найдется по крайней мере одно равное нулю.

**Лемма 4.** Пусть  $0 \in \text{int } \sigma$ , где  $\sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}]$  —  $n$ -мерный симплекс,  $z^* \neq 0$  — произвольная точка из  $\mathbb{R}^n$ . Тогда среди вершин симплекса  $\sigma$  найдется такой набор  $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$  длины  $n$ , что  $0 \in \sigma^* = [z^{i_1}, \dots, z^{i_n}, z^*]$ .

Доказательство. Достаточно показать, что существует такое целое число  $j$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ , при котором система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} \lambda_i z^i + \lambda_j z^* = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad (18)$$

имеет неотрицательное решение  $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(j)}$ , т. е.  $\lambda_i^{(j)} \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Рассмотрим отдельно два случая:  $z^* \in \text{int } \sigma$  и  $z^* \notin \text{int } \sigma$ . Пусть  $z^* \in \text{int } \sigma$ . Это означает, что решение  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n+1}^*$  системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = z^* \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

неотрицательно. Подставив это представление точки  $z^*$  в (18), получим

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} \lambda_i^{(j)} z^i + \lambda_j^{(j)} z^* = \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} (\lambda_i^{(j)} + \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*) z^i + \lambda_j^{(j)} \lambda_j^* z^* = 0. \quad (19)$$

Далее, пусть  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n+1}^0$  — решение системы (16). Тогда из (19) получаем равенства

$$\lambda_i^0 = \lambda_i^{(j)} + \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*, \quad i \neq j, \quad \lambda_j^0 = \lambda_j^{(j)} \lambda_j^*.$$

Отсюда следует, что  $\lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*$ ,  $i \neq j$ , и  $\lambda_j^{(j)} = \lambda_j^0 / \lambda_j^*$ . Взяв  $j = \arg \min_{i=\overline{1, n+1}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*$ , получим  $\lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - \lambda_j^{(j)} \lambda_i^* \geq \lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - (\lambda_i^0 / \lambda_i^*) \lambda_i^* = 0$ ,

$i \neq j$ , и  $\lambda_j^{(j)} > 0$ , так как  $0 \in \sigma$  и в силу выбора числа  $j$ . При выбранном  $j$  система (18) имеет неотрицательное решение.

Рассмотрим второй случай, а именно,  $z^* \notin \text{int } \sigma$ . Так как  $0 \notin \text{int } \sigma$ , существует действительное число  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , при котором точка  $\beta z^* \in \partial \sigma$ , где  $\partial \sigma$  — граница симплекса  $\sigma$ . Для точки  $\beta z^*$ , как показано выше существует набор  $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$  длины  $n$ , что  $0 \in \sigma_\beta^* = [z^{i_1}, \dots, z^{i_n}, \beta z^*]$ . С другой стороны,

$\sigma_\beta^* \subset \sigma^*$ . Следовательно, и в этом случае утверждение леммы имеет место. Лемма 4 доказана.

Пусть  $\{\sigma^k\}$ ,  $\sigma^k = [z_k^1, \dots, z_k^{n+1}]$ , последовательность симплексов, сгенерированная алгоритмом. Обозначим через  $x_k^*$  точку, принадлежащую симплексу  $\sigma^k$ , с нормой  $\|x_k^*\| = \rho_k \equiv \rho(\sigma^k)$ , а через  $y_k$  — точку с минимальной нормой на гиперплоскости, проходящей через все вершины симплекса  $\sigma^k$ , кроме вершины  $z_k^{i_0}$  (индекс  $i_0$  определяется на шаге 4 (случай  $|\Lambda| = 1$ ) или 5 алгоритма (случай  $|\Lambda| > 1$ )).

Вначале покажем, что через конечное число итераций  $k = k_0$  будет иметь место включение  $0 \in \text{int } \sigma^{k_0}$ . Далее будет установлена сходимость по функционалу к оптимуму, т. е. слабая сходимость алгоритма.

В силу леммы 3 и шагов 4 и 5 алгоритма при любом  $k > n + 1$  имеет место неравенство

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k. \quad (20)$$

Покажем, что из последовательности  $\{\rho_k\}$  можно выделить строго убывающую подпоследовательность. Предположим противное, т.е., что, начиная с некоторого номера итерации  $k_0$ , соотношение (20) выполняется как равенство для всех  $k \geq k_0$ , причём  $\rho_{k_0} \neq 0$ .

По построению выполнены следующие соотношения:  $(\tilde{c}, z_k^i) = -d_k$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $(\tilde{c}, z_{k+1}^{n+1}) > 0$ , где  $d_k > 0$  — некоторое действительное число. Отсюда и из определений точек  $x_{k_0}^*$  и  $y_k$  следует, что  $\|x_{k_0}^* - y_k\| > \|x_{k_0}^* - y_{k+1}\|$ .

С другой стороны, имеют место равенства

$$\|x_{k_0}^*\|^2 = \|y_k\|^2 + \|x_{k_0}^* - y_k\|^2$$

Но тогда  $\|y_k\| < \|y_{k+1}\|$  и последовательность  $\{\|y_k\|\}$  ограничена сверху нормой  $\|x_{k_0}^*\|$ . Последовательность смежных симплексов  $\{\sigma^k\}$ , которым соответствует последовательность  $\{\|y_k\|\}$ , входит естественным образом в покрытие области достижимости  $\mathfrak{R}(T)$   $n$ -мерными смежными симплексами. По предположению  $T > T_{\text{опт}}$ . Поэтому  $0 \in \text{int } \mathfrak{R}(T)$  и тогда в силу следствия 1 на некоторой конечной итерации  $k_1 \geq k_0$  выполнено неравенство

$$(x_{k_0}^*, z_{k_1}^{n+1}) < (x_{k_0}^*, x_{k_0}^*). \quad (21)$$

Рассмотрим выражение  $\|\zeta x_{k_0}^* + (1 - \zeta) z_{k_1}^{n+1}\|^2$ . Минимум по  $\zeta$  это выражение достигает при

$$\zeta = \zeta^* = \frac{(z_{k_1}^{n+1}, z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}{(z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*, z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}.$$

Отсюда в силу неравенства (21)

$$\zeta^* < \frac{(z_{k_1}^{n+1}, z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*) - (x_{k_0}^*, z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}{(z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*, z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)} = 1.$$

Последнее означает, что

$$\|x_{k_0}^*\| = \rho_{k_0} > \|\bar{\zeta}^* x_{k_0}^* + (1 - \bar{\zeta}^*) z_{k_1}^{n+1}\| \geq \rho_{k_1},$$

где  $\bar{\zeta}^* = \max(0, \zeta^*)$ . Противоречие с предположением, что при  $k \geq k_1$  выражение (20) является равенством.

Следовательно, из последовательности  $\{\rho_k\}$  можно выделить строго убывающую подпоследовательность  $\{\rho_{k_j}\}$ , которая ограничена снизу нулём. В силу следствия 1 последовательности  $\{\rho_k\}$  и  $\{\rho_{k_j}\}$  конечны и их общий последний элемент равен нулю.

Пусть  $\Lambda_k = \{i : \lambda_i^0 < 0\}$ , где  $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n+1}^0)$  — решение системы (16) при  $z^i = z_k^i$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ). Как показано выше, найдется такое  $k_0 \geq 1$ , что  $\rho_{k_0} = \rho(\sigma^{k_0}) = 0$ . Это означает, что  $0 \in \sigma^{k_0}$ . Поэтому  $\Lambda_{k_0} = \emptyset$  и  $\Lambda_k \neq \emptyset$  при  $k < k_0$ .

В силу шагов 8–16 алгоритма при любом  $k \geq k_0$  имеет место включение  $0 \in \sigma^k$ . Это означает, что множество  $\Lambda_k = \emptyset$  при любом  $k \geq k_0$ .

Пусть  $k \geq k_0$  фиксировано. На  $k$ -й итерации при поиске решения  $\mu_k$  уравнения (14) методом дихотомии возможны два случая: 1.  $z_\mu \in \sigma^k$  при некоторой очередной аппроксимации  $\mu$  решения  $\mu_k$  или 2.  $z_{\mu_k} \notin \sigma^k$ .

Рассмотрим случай 1. В силу леммы 4 среди вершин симплекса  $\sigma^k$  найдется такой набор вершин  $z_k^1, \dots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \dots, z_k^{n+1}$ , что  $0 \in \sigma^{k+1} = [z_k^1, \dots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \dots, z_k^{n+1}, z_\mu]$ , где  $i_0 = i_0(k)$  — индекс, определяемый на шаге 14 алгоритма. По построению имеем  $\sigma^{k+1} \subset \sigma^k$ , поэтому

$$\sigma^{k+1} \cap \sigma^k = \sigma^{k+1}.$$

В случае 2 аналогично случаю 1 среди вершин симплекса  $\sigma^k$  найдется такой набор вершин  $z_k^1, \dots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \dots, z_k^{n+1}$ , что  $0 \in \sigma^{k+1} = [z_k^1, \dots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \dots, z_k^{n+1}, z_{\mu_k}]$ , где  $i_0 = i_0(k)$  — индекс, определяемый на шаге 16 алгоритма. Так как  $z_{\mu_k} \notin \sigma^k$ , пересечение  $\sigma^{k+1} \cap \sigma^k \neq \sigma^{k+1}$  и  $\sigma^{k+1}$  содержит внутри 0.

Предположим, что существует такой конечный номер  $k_1 \geq k_0$ , что  $i_0 = i_0(k)$  не зависит от номера итерации  $k$  при  $k \geq k_1$ . Обозначим через  $\tilde{c}_k^i$  соответствующие вектора  $\tilde{c}^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , на  $k$ -й итерации. Тогда очевидно, что  $z_k^i \equiv z_{k_1}^i$ ,  $\tilde{c}_k^i \equiv \tilde{c}_{k_1}^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $i \neq i_0$ , для любого  $k \geq k_1$ .

Пусть  $\lambda^{0,k} = (\lambda_i^{0,k}, \dots, \lambda_{n+1}^{0,k})$  и  $\lambda^{*,k} = (\lambda_i^{*,k}, \dots, \lambda_{n+1}^{*,k})$  — решения соответственно систем линейных алгебраических уравнений (16) и (16\*) при  $z^i = z_{k_1}^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Покажем, что  $\lambda_{i_0}^{0,k_1} > 0$ . Предположим противное, т.е.  $\lambda_{i_0}^{0,k_1} = 0$ . Тогда при любом  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu(\bar{c})$ , за исключением такого  $\mu = \mu'$ , при котором  $z^j = z_{\mu'}$ , где  $j = \arg \max_{i=\overline{1, n+1}} \lambda_i^0$  (см. шаг 14 алгоритма), вектор  $\lambda^{*,k}$  имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. Это означает, что на  $(k_1 + 1)$ -й итерации мы попадаем на шаг 16 алгоритма. Так как  $z_{k_1+1}^i = z_{k_1}^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $i \neq i_0$  и  $\lambda_{i_0}^{0,k_1} = 0$ , то и  $\lambda_{i_0}^{0,k_1+1} = 0$ . Но тогда  $\tau = 1$  и  $\lambda_{i_0}^{0,k_1+1}$  станут равными  $\lambda_i^{0,k_1}$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Отсюда в силу того, что  $\lambda_{i_0}^{0,k_1+1} = 0$ , получаем  $i_0(k_1 + 1) \neq i_0 = i_0(k_1)$ . Это противоречит предположению о том, что при  $k \geq k_1$  величина  $i_0 = i_0(k)$  не зависит от  $k$ . Следовательно,  $\lambda_{i_0}^{0,k_1} > 0$ . Нетрудно видеть, что величина  $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$  для любого  $k \geq k_1$ . Поэтому для любого  $k \geq k_1$  найдется такое  $\mu = \mu(k)$ , что система (16\*) имеет неотрицательное решение  $\lambda^*$ , т.е.  $\lambda_i^* \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Так как  $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$ , величина  $\gamma = \lambda_{i_0}^{0,k} / \lambda_{i_0}^{*,k}$  также положительна. Поэтому (см. шаг 14 алгоритма) справедливы неравенства

$$\lambda_i^{0,k+1} = \lambda_i^{0,k} - \gamma \lambda_i^{*,k} \leq \lambda_i^{0,k} \tag{22}$$

при  $i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $i \neq i_0$ . Отсюда следует, что

$$\lambda_{i_0}^{0,k+1} = 1 - \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \lambda_i^{0,k+1} \geq 1 - \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \lambda_i^{0,k} = \lambda_{i_0}^{0,k}.$$

Так как  $\lambda_{i_0}^{*,k} < 1$ , по крайней мере при одном  $i \neq i_0$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , неравенство (22) является строгим. Но тогда

$$\lambda_{i_0}^{0,k} < \lambda_{i_0}^{0,k+1}. \tag{22*}$$

Последовательность  $\{\lambda_{i_0}^{0,k}\}$  строго возрастающая и ограничена сверху единицей. Поэтому существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i_0}^{0,k} = \bar{\lambda}_{i_0}^0$ . Но тогда существуют пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{0,k} = \bar{\lambda}_i^0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $i \neq i_0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{*,k} = \bar{\lambda}_i^*$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Далее, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i^0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{0,k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_i^{0,k} - \gamma_k \lambda_i^{*,k}) = \bar{\lambda}_i^0 - \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{*,k} \\ &= \bar{\lambda}_i^0 - \gamma^* \bar{\lambda}_i^*, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad i \neq i_0, \end{aligned}$$

где  $\gamma_k = \lambda_{i_0}^{0,k} / \lambda_{i_0}^{*,k}$ ,  $\gamma^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k$ .

Отсюда, так как величина  $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$  для любого  $k \geq k_1$ , следует, что  $\gamma^* > 0$  и все  $\bar{\lambda}_i^* = 0$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $i \neq i_0$ . Но тогда  $\bar{\lambda}_{i_0}^* = 1$ . Это означает, что найдется такое конечное  $k = k(\varepsilon_0)$ , при котором  $|\lambda_{i_0}^{*,k(\varepsilon_0)} - 1| \leq \varepsilon_0$ .

Покажем, что не существует такого  $i_2$ ,  $1 \leq i_2 \leq n+1$ , что  $\lambda_{i_2}^{0,k} = 0$  при всех  $k \geq k(\varepsilon_0)$ . Легко видеть, что  $i_2 \neq i_0$ , так как  $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$  для любого  $k \geq k_1$ . В данном случае алгоритм на  $k(\varepsilon_0)$ -й итерации продолжит поиск решения  $\mu_{k(\varepsilon_0)}$  уравнения (14) (см. шаг 14). Полученная точка  $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$  такова, что решение системы линейных алгебраических уравнений (16\*) при  $\mu = \mu_{k(\varepsilon_0)}$  имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. И, так как точки  $z_{k_1}^{i_2}$  и  $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$  лежат по разные стороны относительно гиперплоскости, проходящей через точки  $z_{k(\varepsilon_0)}^i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $i \neq i_2$ , величина  $\lambda_{i_2}^{*,k(\varepsilon_0)} < 0$  (см. лемму 2). Отсюда в силу равенства  $\lambda_{i_2}^{0,k(\varepsilon_0)} = 0$  получаем на шаге 16 алгоритма, что величина  $\tau = 1$ . Поэтому точка  $z_{k(\varepsilon_0)}^{i_0}$  будет заменена на точку  $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$ . На  $(k(\varepsilon_0) + 1)$ -й итерации решение  $\lambda^{0,k(\varepsilon_0)+1}$  системы линейных алгебраических уравнений (16) будет таково, что  $\lambda_{i_2}^{0,k(\varepsilon_0)+1} > 0$ . Следовательно, число нулевых компонент в решении системы (16) на  $(k(\varepsilon_0) + 1)$ -й итерации уменьшилось по меньшей мере на единицу по сравнению с  $k(\varepsilon_0)$ -й итерацией. При этом поскольку по предположению  $i_0 = i_0(k)$  постоянна при  $k \geq k_1$  величина  $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$ .

Так как число нулевых компонент решения системы (16) убывает, то найдется такой номер  $k_2 \geq k(\varepsilon_0)$ , при котором все компоненты этого решения будут положительны, т. е. такого  $i_2$ ,  $1 \leq i_2 \leq n+1$ , что  $\lambda_{i_2}^{0,k(\varepsilon_0)} = 0$  не существует.

Пусть все  $\lambda_i^{0,k(\varepsilon_0)} > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Тогда на  $(k(\varepsilon_0) + 1)$ -й итерации величина

$$\gamma = \arg \min_{i \in \{i: \lambda_i^{*,k(\varepsilon_0)+1} > 0\}} \lambda_i^{0,k(\varepsilon_0)+1} / \lambda_i^{*,k(\varepsilon_0)} > 0,$$

а  $|\lambda_i^{*,k(\varepsilon_0)+1} - 1| \leq \varepsilon_0$ . Очевидно, что при  $k = k(\varepsilon_0)$  имеет место строгое включение

$$\sigma^{k+1} \subset \sigma^k. \tag{23}$$

Далее на шаге 14 получаем вектор  $c^*$ , который существенно отличается от вектора  $\tilde{c}_{k(\varepsilon_0)+1}^{i_0}$ , полученного на  $k(\varepsilon_0)$ -й итерации на шаге 8. При  $k = k(\varepsilon_0) + 2$  либо справедливо неравенство

$$|\lambda_i^{*,k} - 1| > \varepsilon_0, \tag{24}$$

либо осуществляется переход к шагу 16.

Пусть при  $k = k(\varepsilon_0) + 2$  справедливо неравенство (24). Предположив, что это не так, приходим к выводу, что точка  $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)+2}}$  совпадает с вершиной  $z_{k(\varepsilon_0)+1}^{i_0}$  симплекса  $\sigma^{k(\varepsilon_0)+1}$ , что противоречит тому, что вектор  $c^*$  существенно отличается от  $\tilde{c}_{k(\varepsilon_0)+1}^{i_0}$ . Поэтому, поскольку все  $\lambda_i^{0,k(\varepsilon_0)+2} > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , при  $k = k(\varepsilon_0) + 1$  имеет место строгое включение (23).

Переход к шагу 16 алгоритма возможен только тогда, когда при поиске методом дихотомии решения системы (14) с необходимой точностью все выбираемые значения  $\mu$  из интервала  $[0, \mu(c^*)]$  таковы, что решение системы (16\*) имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. Величина  $\tau_k = \tau$ , определяемая на этом шаге, положительна и строго меньше единицы, поскольку  $\lambda_i^{0,k} > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$  при  $k \geq k(\varepsilon_0)$ . Но тогда  $\tau_k \lambda_{i_0}^{0,k} + (1 - \tau_k) \lambda_{i_0}^{*,k} > 0$  в силу определения величины  $i_0$  и того, что  $i_0 = i_0(k)$  не зависит от номера итерации  $k$  по предположению. Пусть

$$l_k = \arg \min_{1 \leq i \leq n+1} \{ \tau_k \lambda_i^{0,k} + (1 - \tau_k) \lambda_i^{*,k} \}.$$

Тогда в силу определения точки  $z_{\mu_k}$  и того, что симплекс  $\sigma^{k+1} = [z_k^1, \dots, z_k^{i_0-1}, z_{\mu_k}, z_k^{i_0+1}, \dots, z_k^{n+1}]$  содержит начало координат пространства  $\mathbb{R}^n$  внутри по построению, справедливы неравенства  $(\bar{c}_k, z_k^{l_k}) > 0$  и  $(\bar{c}_k, z_k^{i_0}) > 0$ , либо неравенства противоположного знака  $(\bar{c}_k, z_k^{l_k}) < 0$  и  $(\bar{c}_k, z_k^{i_0}) < 0$ , где  $\bar{c}_k = \bar{c}$ ,  $\bar{c}$  определено на  $k$ -й итерации (см. шаг 9 алгоритма). Поэтому на  $(k+1)$ -й итерации решение  $\lambda^{0,k+1}$  системы (16) таково, что

$$\lambda_{i_0}^{0,k+1} > \lambda_{i_0}^{0,k}. \tag{25}$$

Предположим, что на каждой итерации  $k \geq k(\varepsilon_0) + 2$  происходит переход к шагу 16 алгоритма. Тогда в силу (25) последовательность  $\{\lambda_{i_0}^{0,k}\}$  имеет предел. Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i_0}^{0,k} = \bar{\lambda}_{i_0}^{0,k}$ . Очевидно, что существуют и пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{0,k} = \bar{\lambda}_i^{0,k}$ ,  $i \neq i_0$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ . Взяв на шаге 8 в качестве  $c^*$  вектор  $\sum_{i=1}^{n+1} \bar{\lambda}_i^0 \tilde{c}^i / \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\lambda}_i^0 \tilde{c}^i \right\|$ , получим точку  $z_{\mu_k}$ , которая совпадает с  $i_0$ -й вершиной предельного симплекса. Отсюда следует, что система (16\*) имеет неотрицательное решение. Противоречие с предположением о том, что на каждой итерации  $k \geq k(\varepsilon_0) + 2$  происходит переход к шагу 16 алгоритма. Следовательно, найдется такой конечный номер  $k = k_2 \geq k(\varepsilon_0) + 2$ , при котором система (16\*) будет иметь неотрицательное решение. А тогда выполнено (24) и имеет место строгое включение (23).

В силу (23) нетрудно видеть, что не существует таких номеров  $k' \geq k_1$  и  $k'' > k'$ , что  $\sigma^{k'} \subseteq \sigma^{k''}$ . Отсюда и того, что  $0 \in \sigma^k$  при всех  $k \geq k_0$ , следует, что последовательность симплексов  $\{\sigma^k\}$  сходится. Ее «точкой сгущения» является некоторый предельный симплекс  $\sigma^* = [z_*^1, \dots, z_*^{n+1}]$ , вершина  $z_*^{i_0}$  которого совпадает с началом координат пространства  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому найдется такой конечный номер  $k_3 \geq k_1$ , что  $\|z_{k_3}^{i_0}\| \leq \varepsilon$ .

Пусть  $I_k = \max_{1 \leq i \leq n+1} I(u^{i,k})$ , где  $u^{i,k}$  — управление, соответствующее  $i$ -й вершине симплекса  $\sigma^k$ . Последовательность чисел  $\{I_k\}$  сходится к вполне определённом пределу, поскольку сходится последовательность  $\{\sigma^k\}$ . Когда выполнено (23), то  $I_k > I_{k+1}$ , поскольку  $z_\mu \in \text{int } \sigma^k$ . Более того, последовательность чисел  $\{I_k\}$  ограничена снизу 0. Следовательно, она имеет единственный предел, совпадающий с  $\mathfrak{J}_{\min}$ .

Таким образом, сходимость алгоритма в случае, когда  $i_0 = i_0(k)$  не зависит от  $k$ , доказана. Аналогично с некоторыми упрощениями доказывается сходимость для случая зависимости от номера итерации.

Сходимость алгоритма доказана.

## Список литературы

- [1] Shevchenko G.V. Algorithm for Solving Linear Problem of Minimizing Resources Consumption// Proceedings of the IASTED International Conference “Automation, Control, and Information Technology” ACIT 2002. Anaheim–Calgary–Zurich: ACTA Press, 2002, P. 224–229.
- [2] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1982.
- [3] von Hohenbalken В. A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes// Math. Program., 1975, V. 9, P. 189–206.